Midtoets Complexe Analyse
16/12/05, 13.15–14.45 uur

1. Laat $P(z)$ een polynoom zijn met reële coefficienten. Toon aan dat de nulpunten van P reëel zijn of als complex toegevoegde paren voorkomen.

2. Laat zien dat de functie $\cos z$ slechts reële nulpunten bezit en bepaal deze.

3. Wanneer heet een functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differentieerbaar? Is de functie $f(z) = \bar{z}^2$ differentieerbaar?

4. Hoe is de convergentiestraal r van de machtreeks $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gedefiniëerd? Geef machtreeksen $F(z)$ met convergentiestraal r gelijk aan $0, 1, \infty$ respectievelijk.

5. Beschouw de functie $f(z)$ gedefinieerd door
$$f(z) = \frac{z^3}{e^{z^2} - 1}, \quad z \neq 0.$$
Laat met behulp van een machtreeksontwikkeling zien dat hierdoor een functie gedefinieerd wordt die analytisch is in een omgeving van $z = 0$. Bepaal de convergentiestraal van de bijbehorende reeksontwikkeling. Aanwijzing: "als $F(z)$ een convergente machtreeks is in z met $F(0) \neq 0$, dan is ook $1/F(z)$ een convergente machtreeks in z." Het is niet nodig de machtreeksontwikkeling van $f(z)$ rond $z = 0$ expliciet te bepalen.

6. Laat $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling zijn en neem aan dat $\gamma : [a, b] \to U$ een continu differentieerbare kromme is. Hoe wordt de integraal
$$\int_\gamma f(z)\, dz$$
gedefinieerd?

7. Bepaal de integraal
$$\int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^2}\, dz$$
als γ een gesloten kromme rond het punt z_0 voorstelt.

8. Laat zien dat
$$\frac{d}{dz} \tan z = 1/\cos^2 z.$$
Bepaal de integraal
$$\int \frac{1}{\cos^2 z}\, dz$$
over een pad van 0 naar i.